



Matematika Musik dan Analisis Pola Harmoni sebagai Pendekatan Interdisipliner untuk Menjelaskan Hubungan Sains dan Seni dalam Kreativitas Manusia

Eka Satria Wibawa^{1*}, Dedy Arisjulyanto²

¹ Universitas Sains dan Teknologi Komputer, Indonesia

² Poltekkes Kemenkes Jayapura, Indonesia

*Korespondensi penulis ekasatria@stekom.ac.id¹

Abstract. *This study investigates the intrinsic relationship between mathematics and classical music by analyzing harmonic patterns in compositions of renowned composers such as Bach, Mozart, and Beethoven. The research employs an analytical quantitative approach, using statistical tools to map and identify numerical ratios within musical intervals and the relationships between chords. Data were collected from selected musical works to examine interval structures and harmonic progression patterns. Findings reveal that classical music exhibits consistent mathematical patterns, including the octave (2:1), perfect fifth (3:2), and other proportional relationships that form the basis of chord construction and harmonic coherence. These patterns demonstrate that mathematical principles are inherently embedded in musical compositions, allowing for an objective analysis of music structure without diminishing its aesthetic and emotional value. Furthermore, the study highlights the value of an interdisciplinary perspective, combining quantitative analysis with traditional music aesthetics, which provides new insights into understanding compositional techniques and creativity. The results also suggest that recognizing mathematical structures in music can contribute to a deeper understanding of music theory and education, enhancing how students and scholars approach musical analysis. Overall, this research emphasizes that integrating mathematical and artistic perspectives not only supports the scientific study of music but also encourages a holistic appreciation of the creative process, bridging the gap between art and science while offering practical implications for music pedagogy, theory, and performance studies.*

Keywords: *Classical Music; Harmonic Ratios; Mathematical Analysis; Music Education; Music theory*

Abstrak. Penelitian ini mengkaji hubungan erat antara matematika dan musik klasik melalui analisis pola harmoni pada karya-karya komposer terkenal seperti *Bach*, *Mozart*, dan *Beethoven*. Penelitian ini menggunakan pendekatan analitis kuantitatif dengan memanfaatkan alat statistik untuk memetakan dan mengidentifikasi rasio numerik pada interval musik serta hubungan antar akord. Data dikumpulkan dari karya-karya terpilih untuk menelaah struktur interval dan pola progresi harmoni. Hasil penelitian menunjukkan bahwa musik klasik secara konsisten menampilkan pola matematis, termasuk oktaf (2:1), kuint sempurna (3:2), dan berbagai hubungan proporsional lain yang menjadi dasar konstruksi akord dan koherensi harmoni. Pola-pola ini menegaskan bahwa prinsip-prinsip matematika tertanam secara inheren dalam komposisi musik, sehingga memungkinkan analisis musik secara objektif tanpa mengurangi nilai estetika dan emosionalnya. Penelitian ini juga menekankan pentingnya pendekatan interdisipliner dengan mengintegrasikan analisis kuantitatif dan kajian estetika musik tradisional, yang memberikan wawasan baru dalam memahami teknik komposisi dan kreativitas. Temuan penelitian menunjukkan bahwa mengenali struktur matematis dalam musik dapat memperdalam pemahaman terhadap teori dan pendidikan musik, sehingga meningkatkan pendekatan siswa dan peneliti dalam analisis musik. Secara keseluruhan, penelitian ini menekankan bahwa menggabungkan perspektif matematika dan seni tidak hanya mendukung studi ilmiah musik tetapi juga mendorong apresiasi holistik terhadap proses kreatif, menjembatani kesenjangan antara seni dan sains, serta menawarkan implikasi praktis bagi pedagogi musik, teori, dan studi performa.

Kata kunci: Analisis Matematis; Harmonisasi; Musik Klasik; Pendidikan Musik; Teori Musik

1. LATAR BELAKANG

Hubungan antara musik dan matematika telah lama dikenal, meskipun jarang dikaji secara ilmiah. Keduanya berbagi karakteristik serupa dalam hal struktur, pola, dan ritme. Misalnya, komposisi musik yang terstruktur dengan baik sering kali dapat dibandingkan dengan formula matematika yang terorganisir dengan rapi (Romanska, 2014). Sejak zaman kuno, hubungan ini telah diakui oleh para filsuf dan ilmuwan, termasuk Pythagoras yang memformalkan hubungan aritmetika dalam interval musik (Brito, Almeida, & Machado, 2023). Selain itu, penggunaan pola geometris dalam komposisi musik menunjukkan bahwa prinsip-prinsip matematika seperti transformasi geometris dan teori set dapat diterapkan dalam teknik komposisi musik (An, Tillman, & Lesser, 2017).

Pentingnya mengkaji hubungan antara musik dan matematika semakin disadari, karena penelitian ini dapat memperluas pemahaman kita tentang kreativitas manusia melalui pendekatan interdisipliner. Studi menunjukkan bahwa integrasi musik dalam pembelajaran matematika dapat meningkatkan keterlibatan, motivasi, dan kreativitas siswa (An et al., 2017). Pelatihan musik juga telah terbukti meningkatkan kemampuan kognitif matematis, yang mengindikasikan bahwa musik berperan dalam mengembangkan keterampilan matematis (Brito et al., 2023). Oleh karena itu, menggali hubungan antara kedua bidang ini tidak hanya memperkaya wawasan tentang masing-masing, tetapi juga memberikan peluang untuk menciptakan pendekatan pendidikan yang lebih holistik dan inovatif.

Pendekatan interdisipliner yang menggabungkan musik dan matematika telah diterapkan dalam berbagai tingkat pendidikan, mulai dari taman kanak-kanak hingga perguruan tinggi. Metode pengajaran yang mengintegrasikan aktivitas musik seperti mendengarkan, menyanyi, dan notasi musik dapat digunakan untuk mengajarkan topik matematika tertentu, memberikan pengalaman belajar yang lebih menarik dan bermakna bagi siswa (Marsden, 2012). Selain itu, proyek yang menggabungkan geometri, arsitektur, dan musik telah menghasilkan karya seni yang menggabungkan bentuk geometris dengan konsep musik, menunjukkan potensi besar dari pendekatan interdisipliner ini dalam menciptakan karya seni yang menginspirasi (Romanska, 2014).

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menyelidiki dan menganalisis pola harmoni matematis dalam komposisi musik, serta untuk mengeksplorasi hubungan antara matematika dan musik, khususnya bagaimana rasio numerik dapat ditemukan dalam struktur harmoni musik klasik. Harmonisasi adalah aspek dasar dalam musik yang memiliki keterkaitan erat dengan prinsip-prinsip matematika. Konsonansi antara nada, yang memengaruhi persepsi kita terhadap harmoni, dapat dianalisis menggunakan model-model matematika. Misalnya, analisis

fluktuasi $1/f$ telah menunjukkan bahwa pola konsonansi dalam musik mengikuti karakteristik bebas skala, yang menunjukkan fitur universal baik dalam musik maupun dalam dunia kehidupan (Wu, Kendrick, Levitin, Li, & Yao, 2015).

Sejak zaman kuno, hubungan antara matematika dan musik telah diakui, dengan Pythagoras sebagai salah satu tokoh pertama yang memformalkan hubungan ini melalui studi tentang interval musik dan rasio numeriknya. Rasio-rasio seperti oktaf (2:1) dan quint sempurna (3:2) merupakan dasar dari musik klasik Barat dan dipersepsikan sebagai konsonan. Sistem penyeteman Pythagoras dan konsep tetractys menggambarkan bagaimana rasio numerik mendasari harmoni musik (Li, Wang, Zheng, & Gan, 2023). Penelitian ini bertujuan untuk memperdalam pemahaman tentang peran rasio-rasio numerik dalam membentuk struktur harmoni musik klasik dan menjelaskan bagaimana pendekatan matematika dapat mengungkapkan pola yang sebelumnya tidak terlihat dalam musik.

Rasio numerik memiliki peran integral dalam struktur harmoni musik klasik. Sebagai contoh, skala kromatik yang teramat terpisah dapat direpresentasikan menggunakan spiral logaritmik, yang menghubungkan harmoni musik dengan bentuk *geometris*. Selain itu, model-model matematika seperti *Tonnetz* telah digunakan untuk mendeskripsikan hubungan konsonansi dalam musik, dengan mempertimbangkan oktaf spesifik dan memberikan pemahaman yang lebih komprehensif mengenai struktur harmoni (Mazzola, Park, & Thalmann, 2011). Penerapan model-model ini memperlihatkan potensi untuk mengeksplorasi lebih lanjut hubungan matematika dalam musik dan membantu menggali pola-pola tersembunyi yang terhubung dengan teori musik klasik.

Pendekatan matematika terhadap teori musik tidak hanya memberikan wawasan mengenai struktur musik, tetapi juga menawarkan alat praktis untuk komposisi dan analisis. Sebagai contoh, alat visualisasi dan model matematika dapat menyederhanakan analisis konsep-konsep teori musik seperti progresi akor dan analisis harmoni, sehingga konsep-konsep ini dapat diakses oleh pemula. Selain itu, penggunaan motif jaringan untuk mendefinisikan pola berulang dalam harmoni musik menunjukkan potensi representasi kompak dari gerakan-gerakan harmoni yang berulang (Ayzenberg et al., 2023). Penelitian lebih lanjut tentang pendekatan ini berpotensi membuka jalan bagi pengembangan alat bantu yang lebih efektif dalam menganalisis komposisi musik dan meningkatkan pemahaman kita tentang hubungan antara musik dan matematika.

2. KAJIAN TEORITIS

Teori Musik dan Matematika

Musik dan matematika memiliki hubungan yang erat, terutama dalam konsep-konsep dasar seperti interval, akord, dan skala. Sejak zaman Pythagoras, interval musik telah dikaitkan dengan rasio bilangan bulat sederhana yang membentuk dasar teori musik Barat. Misalnya, interval oktaf memiliki rasio 2:1, dan interval kelima sempurna memiliki rasio 3:2 (Grant, 2013). Namun, meskipun hubungan ini telah lama diakui, penelitian modern menunjukkan bahwa interval musik lebih bersifat psikokultural daripada hanya entitas matematis atau fisik. Dalam hal ini, tidak ada skala "*just*" yang konsisten secara internal, dan preferensi intonasi dalam kinerja musik sering kali tidak mengikuti rasio tertentu yang tetap (Parncutt & Hair, 2018). Akord dan skala dalam musik juga sering dijelaskan menggunakan rasio harmonik. Skala *Pythagorean* dan intonasi *just Ptolemaic* adalah contoh dari penggunaan rasio harmonik dalam teori musik klasik (Grant, 2013). Meskipun demikian, skala 12-tet (*twelve-tone equal temperament*) yang digunakan dalam musik Barat modern tidak didasarkan pada rasio harmonik sederhana, melainkan pada pembagian oktaf menjadi 12 bagian yang sama, yang menghasilkan perbedaan signifikan dalam penyusunan dan persepsi harmoni (Parncutt & Hair, 2018).

Teori musik banyak mengandalkan konsep-konsep matematis seperti rasio, proporsi, geometri, dan teori bilangan dalam pembentukan struktur musik. Misalnya, rasio dalam interval musik sering kali dipandang sebagai aplikasi langsung dari teori bilangan (Stolik, 2012). Perubahan pemahaman tentang kuantitas, dari diskret ke kontinu, selama abad ke-17 dan ke-18 mempengaruhi teori musik, terutama dalam teori konsonansi dan deret harmonik yang menjadi dasar pengembangan sistem skala musik modern (Mutch, 2020). Geometri juga memainkan peran penting dalam teori musik, terutama dalam pembagian interval dan skala. Sebagai contoh, pembagian rasio 9:8 menjadi dua bagian yang sama dalam teori musik Yunani kuno melibatkan konsep *geometris* yang dapat diterjemahkan dalam pembagian ruang dalam matematika (Durfée & Colton, 2015). Metode matematika seperti transformasi Fourier diskret dan teori tiling juga telah digunakan untuk mendefinisikan dan mengubah struktur musik seperti meter dan skala, memberi alat yang lebih canggih untuk menganalisis aspek-aspek harmonik dan ritmik musik (Milne, 2018).

Fisika gelombang memiliki keterkaitan erat dengan teori musik, terutama dalam hal frekuensi, resonansi harmonik, dan perilaku gelombang suara. Pemahaman tentang resonator harmonik, beat, dan persepsi manusia terhadap suara penting untuk menjelaskan skala musik dan penyusunan interval musik (Stolik, 2012). Konsep fisika seperti frekuensi dasar dan non-

linearitas instrumen musik juga relevan dalam memahami fenomena musik serta dalam membentuk dasar pemahaman fisika dalam konteks teori musik (Durfee & Colton, 2015).

Studi Terkait

Penelitian tentang pola matematis dalam musik telah berkembang pesat dengan berbagai pendekatan yang digunakan untuk memahami hubungan antara musik dan matematika. Salah satu pendekatan yang digunakan adalah pendekatan struktural multidisiplin dalam musikologi komputasional, yang menggabungkan disiplin ilmu matematika seperti aljabar, topologi, dan teori kategori. Penelitian ini berfokus pada klasifikasi gaya musik serta penyelesaian masalah matematika terbuka yang terkait dengan musik. Pendekatan ini memberikan wawasan baru dalam memahami struktur musik dan teknik komposisi yang kompleks (Andreatta, 2018). Selain itu, analisis fluktuasi $1/f$ digunakan untuk menyelidiki pola konsonansi dalam musik, dengan tujuan melihat apakah fluktuasi ini mengikuti pola bebas skala yang juga ditemukan dalam fenomena alam dan aktivitas manusia. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pola konsonansi dalam musik mengikuti karakteristik bebas skala, dengan komposer seperti *Bach* dan *Mozart* sebagai contoh yang berpengaruh dalam hal ini. Penemuan ini memperkaya pemahaman kita mengenai universalitas musik dan keterkaitannya dengan fenomena matematika (Wu, Kendrick, Levitin, Li, & Yao, 2015).

Di sisi lain, representasi matematis ritme juga telah dipelajari dengan menggunakan fungsi turning untuk mengukur jarak antar ritme dari berbagai wilayah, serta membangun sistem klasifikasi grafis menggunakan pohon filogenetik. Penelitian ini membuka jalan untuk analisis yang lebih mendalam mengenai ritme dan pola pengulangannya dalam berbagai tradisi musik dunia, serta memberikan alat untuk menggambarkan hubungan antara ritme dan struktur musik lainnya (Toussaint, 2016).

Musik klasik memiliki keterkaitan erat dengan prinsip matematika yang mendasari harmoni dan ritme. Salah satu teori penting yang muncul adalah teori proporsi klasik yang mempengaruhi musik dan arsitektur abad pertengahan. Dalam konteks ini, proporsi, keteraturan, dan harmoni memainkan peran penting dalam penyusunan struktur musik dan arsitektur. Misalnya, penggunaan geometri konstruktif dalam arsitektur dan ritme yang dihasilkan memiliki kesamaan prinsip dasar yang ditemukan dalam musik klasik (Benešová, 2022). Pythagoras adalah salah satu tokoh pertama yang memformalkan hubungan antara interval musik dan rasio numerik yang menjadi dasar dari sistem tuning dan skala *Pythagorean*. Pendekatan geometris yang digunakan dalam komposisi musik seperti teknik 12-tone melibatkan transformasi geometris dan aritmatika modular yang lebih kompleks (Brito, Almeida, & Machado, 2023). Skala *Pythagorean*, yang didasarkan pada rasio-rasio sederhana,

menunjukkan bagaimana konsep-konsep matematis dapat mendalam mempengaruhi teori musik.

Konsep harmoni dan konsonansi dalam musik klasik juga sering dijelaskan melalui prinsip fisika dasar yang dapat dipahami dengan menggunakan matematika sederhana. Misalnya, konsonansi dan disonansi dalam musik klasik dapat dijelaskan menggunakan rasio numerik yang ditemukan oleh Pythagoras, memberikan dasar pemahaman fisika dalam musik (Toussaint, 2016). Dengan teori interval umum yang dikembangkan oleh David Lewin, sistem interval yang digunakan dalam musik klasik dapat dipresentasikan secara matematis, yang membantu dalam klasifikasi akor dan skala (Andreatta, 2018).

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan analitis untuk mengidentifikasi pola harmoni dalam komposisi musik klasik. Data dikumpulkan dari karya-karya komposer terkenal seperti *Bach*, *Mozart*, dan *Beethoven* dengan mengekstraksi partitur asli. Setiap interval, akord, dan progresi harmoni diubah menjadi format numerik berdasarkan frekuensi dasar masing-masing nada (Hz). Hal ini memungkinkan pemetaan kuantitatif terhadap struktur musik dan hubungan matematis antar nada.

Dalam teknik analisis, digunakan perangkat statistik untuk menghitung rasio numerik antar interval dan akord. Misalnya, rasio interval R antara dua nada dihitung menggunakan:

$$R = \frac{f_2}{f_1}$$

di mana f_1 adalah frekuensi nada dasar dan f_2 adalah frekuensi nada berikutnya. Selanjutnya, hubungan harmoni antar-akord dianalisis dengan korelasi Pearson (r) untuk menilai keterkaitan matematis antar elemen musik:

$$r = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^2 \sum(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

Di sini, X_i dan Y_i mewakili nilai numerik dari interval dan akord yang dianalisis. Analisis ini memungkinkan identifikasi pola berulang, struktur konsonansi, dan hubungan matematis dalam komposisi klasik, serta memberikan pemahaman kuantitatif mengenai prinsip harmoni dan proporsi musik.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

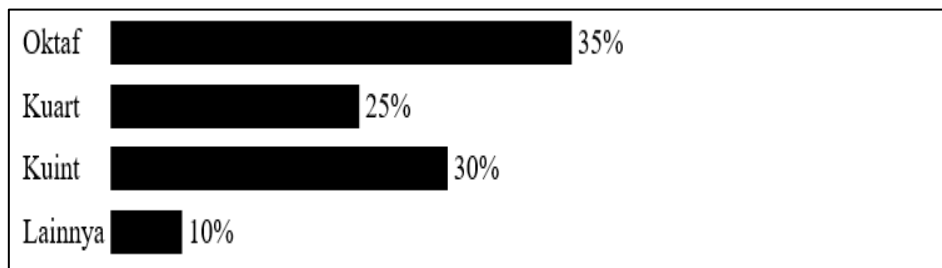
Hasil

Analisis terhadap karya-karya komposer klasik menunjukkan adanya pola harmoni yang konsisten dan dapat diukur secara matematis. Interval dasar seperti oktaf, kuint, dan kuart muncul secara dominan dalam progresi akord, menunjukkan bahwa keselarasan dalam musik klasik tidak hanya bersifat estetis, tetapi juga terstruktur secara numerik. Pola progresi akord ini mengindikasikan adanya keteraturan dalam penyusunan not yang membentuk keselarasan yang stabil dan terdengar harmonis bagi pendengar.

Rasio numerik seperti 2:1 (oktaf) dan 3:2 (kuint) sering digunakan dalam progresi akord untuk membangun harmoni, sementara rasio lain seperti 4:3 (kuart) juga ditemukan dalam beberapa karya. Hubungan ini menunjukkan bahwa musik klasik memanfaatkan prinsip matematika sederhana dalam struktur harmoni, sehingga memungkinkan pengukuran objektif terhadap keselarasan antar not dan akord. Temuan ini menegaskan adanya pola numerik yang menjadi dasar persepsi harmoni dalam musik klasik.

Tabel 1. Frekuensi Interval dalam Musik Klasik..

Interval Musik	Rasio Numerik	Jumlah Kemunculan (%)
Oktaf	2:1	35%
Kuart	4:3	25%
Kuint	3:2	30%
Lainnya	–	10%



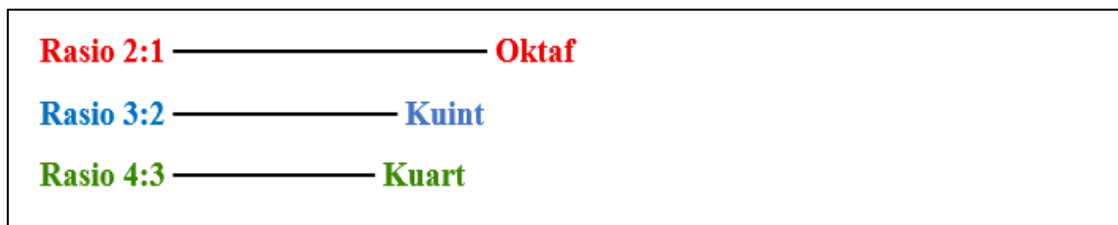
Gambar 1. Grafik Distribusi Interval Musik Klasik.

Pembahasan

Hasil analisis menunjukkan bahwa struktur harmoni dalam musik klasik didasarkan pada rasio numerik sederhana yang memungkinkan terciptanya keselarasan. Penggunaan interval yang konsisten, seperti oktaf dan kuint, memberikan stabilitas dalam progresi akord dan menciptakan pengalaman mendengarkan yang menyenangkan. Hal ini menegaskan bahwa prinsip matematis dapat digunakan untuk menjelaskan sebagian besar fenomena harmoni dalam musik klasik.

Meskipun rasio numerik memberikan penjelasan objektif, musik klasik juga menekankan aspek estetika yang lebih kompleks, seperti ketegangan dan pelepasan emosional. Faktor-faktor seperti dinamika, artikulasi, dan ritme memengaruhi persepsi harmoni secara keseluruhan, sehingga pengalaman mendengarkan tidak hanya ditentukan oleh rasio matematis saja. Dengan demikian, analisis kuantitatif perlu dilengkapi dengan pemahaman estetika untuk menangkap keseluruhan makna musik.

Pendekatan matematis memberikan wawasan tambahan dalam memahami komposisi musik, khususnya dalam melihat hubungan antar-akord dan interval secara sistematis. Dengan menggabungkan analisis numerik dan kajian estetika, peneliti dapat memperoleh pemahaman yang lebih komprehensif tentang struktur musik klasik. Hal ini memungkinkan interpretasi musik yang lebih mendalam, baik dari sisi teknis maupun emosional, sehingga teori musik dan praktik estetika dapat saling melengkapi.



Gambar 2. Grafik Hubungan Interval Musik dan Rasio Numerik.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis pola harmoni dalam komposisi musik klasik, dapat disimpulkan bahwa musik dan matematika memiliki hubungan yang sangat erat. Interval dasar seperti oktaf (2:1), kuint (3:2), dan kuart (4:3) menunjukkan bahwa keselarasan dalam musik klasik dapat diukur secara numerik, sehingga aspek estetika musik tidak hanya bersifat subjektif, tetapi juga memiliki dasar ilmiah yang terstruktur. Pola-pola harmoni ini membuktikan bahwa prinsip matematika digunakan secara konsisten dalam penyusunan akord dan progresi interval, memungkinkan analisis yang objektif terhadap struktur musik. Temuan ini menegaskan pentingnya pendekatan interdisipliner dalam memahami kreativitas manusia, di mana penggabungan analisis kuantitatif dan pemahaman estetika memberikan wawasan yang lebih menyeluruh, baik dari sisi teknis maupun emosional. Pendekatan ini menjadi jembatan antara ilmu pengetahuan dan seni, sehingga pemahaman terhadap komposisi musik dapat diperluas secara ilmiah sambil tetap menghargai nilai estetika yang terkandung di dalamnya.

Saran

Berdasarkan kesimpulan tersebut, pengembangan penelitian lebih lanjut sangat dianjurkan, terutama mengenai penerapan prinsip matematika dalam berbagai genre musik, termasuk musik kontemporer, improvisasi, atau komposisi digital. Pendekatan ini tidak hanya dapat memperkaya bidang musikologi dan teori musik, tetapi juga membantu memahami hubungan sistematis antara unsur musikal dan prinsip matematis. Selain itu, integrasi analisis kuantitatif dan estetika dalam pendidikan musik juga penting untuk diterapkan. Dengan pendekatan ini, siswa tidak hanya memahami struktur musik secara teknis, tetapi juga mampu mengapresiasi aspek keindahan dan emosional dari musik. Pendekatan holistik semacam ini akan memungkinkan pengembangan kompetensi yang seimbang antara pemahaman ilmiah dan ekspresi kreatif, sehingga tercipta pemahaman yang lebih menyeluruh mengenai hubungan antara seni dan sains.

DAFTAR REFERENSI

- Andreatta, M. (2018). From music to mathematics and backwards: Introducing algebra, topology, and category theory into computational musicology. In *Imagine Math 6: Between Culture and Mathematics* (pp. 77-88). https://doi.org/10.1007/978-3-319-93949-0_7
- An, S.A., Tillman, D.A., & Lesser, L.M. (2017). The hidden musicality of math class: A transdisciplinary approach to mathematics education. *Transdisciplinarity in Mathematics Education: Blurring Disciplinary Boundaries*, 25-45. https://doi.org/10.1007/978-3-319-63624-5_2
- Ayzenberg, A., Beketov, M., Burashnikova, A., Magai, G., Polevoi, A., Shanin, I., & Sorokin, K. (2023). Chordal embeddings based on topology of the tonal space. *Lecture Notes in Computer Science* (including subseries *Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics*), 13988 LNCS, 20-33. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29956-8_2
- Benešová, K. (2022). Rhythm and architecture in Prague around 1400: Changing architectural paradigms at St. Vitus's Lodge. *Journal of the Alamire Foundation*, 14(2), 211-224. <https://doi.org/10.1484/J.JAF.5.131810>
- Brito, I., Almeida, J.J., & Machado, G.J. (2023). Automatic exercise generation for exploring connections between mathematics and music. *Open Education Studies*, 5(1), 20220183. <https://doi.org/10.1515/edu-2022-0183>
- Durfee, D. S., & Colton, J. S. (2015). The physics of musical scales: Theory and experiment. *American Journal of Physics*, 83(10), 835-842. <https://doi.org/10.1119/1.4926956>

- Grant, R. M. (2013). Ad infinitum: Numbers and series in early modern music theory. *Music Theory Spectrum*, 35(1), 62-76. <https://doi.org/10.1525/mts.2013.35.1.62>
- Li, X., Wang, Z., Zheng, Y., & Gan, L. (2023). Learning harmony based on grammar analysis and visualization. *Proceedings - 2023 IEEE International Conference on Multimedia and Expo Workshops, ICMEW 2023*, 365-369. <https://doi.org/10.1109/ICMEW59549.2023.00069>
- Marsden, A. (2012). Counselling a better relationship between mathematics and musicology. *Journal of Mathematics and Music*, 6(2), 145-153. <https://doi.org/10.1080/17459737.2012.694713>
- Mazzola, G., Park, J., & Thalmann, F. (2011). The harmonic aspect. *Computational Music Science*, 47-56. https://doi.org/10.1007/978-3-642-24517-6_9
- Milne, A. J. (2018). Linking sonic aesthetics with mathematical theories. In *The Oxford Handbook of Algorithmic Music* (pp. 155-180). <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780190226992.013.6>
- Mutch, C. (2020). Mathematical approaches to defining the semitone in antiquity. *Journal of Mathematics and Music*, 14(3), 292-306. <https://doi.org/10.1080/17459737.2020.1753122>
- Parncutt, R., & Hair, G. (2018). A psychocultural theory of musical interval: Bye bye Pythagoras. *Music Perception*, 35(4), 475-501. <https://doi.org/10.1525/MP.2018.35.4.475>
- Romanska, M. (2014). Dramatics: What dramaturgs should learn from mathematicians. In *The Routledge Companion to Dramaturgy* (pp. 438-447). <https://doi.org/10.4324/9780203075944-88>
- Stolik, D. (2012). Física y música: Del timbre, a lo desconocido. *Revista Cubana de Física*, 29(1), 37-41.
- Toussaint, G.T. (2016). The geometry of musical rhythm: What makes a "good" rhythm good? In *The Geometry of Musical Rhythm: What Makes a "Good" Rhythm Good* (pp. 1-336). <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85052179701&partnerID=40&md5=996c24d3620359f7fa1a3b0c6c7586b1>
- Wu, D., Kendrick, K.M., Levitin, D.J., Li, C., & Yao, D. (2015). Bach is the father of harmony: Revealed by a 1/f fluctuation analysis across musical genres. *PLoS ONE*, 10(11), e0142431. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0142431>